

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Фундаментальная математика и механика

Механика деформируемого твердого тела

Скоробогатов Денис Дмитриевич

# Разрушение поверхностей твердых тел при кавитационном воздействии

Дипломная работа

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, проф., Петров Ю.В.

Рецензент:

канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Бородин И.Н.

Санкт-Петербург

2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanics

Mechanics of deformable solids

Skorobogatov Denis Dmitrievich

# Solid surface fracture under cavitation attack

Graduation Thesis

Scientific supervisor:

prof., Petrov Y.V.

Reviewer:

senior researcher, Borodin I.N.

Saint-Petersburg

2017

# Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Введение</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1 Гидродинамическая кавитация . . . . .  | 2         |
| 1.2 Акустическая кавитация . . . . .   | 3         |
| 1.3 Физические механизмы кавитационного разрушения . . .                               | 4         |
| <b>2 Кавитационное разрушение</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1 Время кавитационного воздействия . . . . .   | 5         |
| 2.2 Амплитуда гидродинамического давления . . . . .                                    | 6         |
| <b>3 Разрушение поверхности тела при ударе абсолютно твердой<br/>микрочастицы</b>      | <b>8</b>  |
| 3.1 Удар сферической микрочастицы . . . . .  | 10        |
| 3.2 Удар цилиндрической микрочастицы . . . . .   | 15        |
| 3.3 Сравнение результатов при ударе сферической и цилиндрической микрочастиц . . . . . | 20        |
| 3.4 Оценка параметров потока жидкости . . . . .  | 21        |
| <b>4 Заключение</b>  | <b>23</b> |
| <b>Список литературы</b>   | <b>24</b> |

# 1 Введение

Кавитация - процесс образования и последующего схлопывания пузырьков газа в жидкости. Кавитация возникает в результате локального понижения давления в жидкости до некоторого критического значения, которое примерно равно давлению насыщенного пара этой жидкости при данной температуре. При наличии в жидкости микроскопических пузырьков кавитация возникает при давлениях выше, чем давление насыщенного пара. После образования, каждый кавитационный пузырек растёт до максимального размера, а затем схлопывается. Весь процесс происходит за время, порядка десятых долей миллисекунды [1, 2].

## 1.1 Гидродинамическая кавитация

Предположим, что жидкость идеальна, несжимаема и баротропна, движение установившееся, а массовые силы консервативны. Тогда справедлив интеграл Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + V + p = const. \quad (1)$$

Из него следует, что при обтекании твердого тела в некоторых областях потока жидкости давление может значительно снижаться, являясь причиной возникновения кавитационных пузырьков. Затем пузырьки попадают в области потока с высоким давлением и происходит их схлопывание.

Рассмотрим движение жидкости в поле силы тяжести, тогда потенциал массовых сил  $V = gz$ . Кавитация возникает при критическом давлении  $p_{кр}$  и скорости  $v_{кр}$ , которые связаны соотношением (1).

$$\frac{\rho v^2}{2} + gz_1 + p = \frac{\rho v_{кр}^2}{2} + gz_2 + p_{кр}$$

Из этого выражения для горизонтального потока (при  $z_1 = z_2$ ) можно выделить число кавитации

$$\chi = \frac{2(p - p_{кр})}{\rho v^2}$$



Рис. 1: Кавитационное разрушение детали насоса

Значение числа кавитации, при котором появляются первые признаки кавитации, называется критическим числом кавитации. Его величина зависит от физических свойств жидкости и геометрии обтекаемого тела и существенно меняется от объекта к объекту [3].

Явление кавитации, в том числе и гидродинамическая, сопровождается рядом паразитных эффектов. К ним относится сильный шум, возникающий при коллапсе большого числа кавитационных пузырьков, эрозия поверхности обтекаемых тел, ухудшение характеристик насосов, турбин, винтов и других механизмов. На рис. 1 представлен пример разрушительного воздействия кавитации.

## **1.2 Акустическая кавитация**

Акустическая кавитация возникает при прохождении через жидкость акустической волны. Кавитационные пузырьки образуются в фазе разрежения и схлопываются в фазе сжатия под действием повышенного давления и сил поверхностного натяжения. После схлопывания пузырька в жидкости распространяется ударная волна, создавая сильный шум.

В целом акустическая кавитация является паразитным эффектом, который, например, разрушает рабочие поверхности подводных ультразвуковых излучателей.

### 1.3 Физические механизмы кавитационного разрушения

Для полного понимания природы кавитационного разрушения необходимо определить воздействие отдельного кавитационного пузырька на поверхность тела. Выделяют два механизма кавитационного разрушения: Рэлея и Корнфельда Суворова.

В работе [4] Рэлей установил, что при коллапсе пустого пузырька в несжимаемой жидкости радиальное распределение давления имеет вид

$$p(r, t) = p_0 \left[ 1 + \frac{R_0^3}{3R^2 r} \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \right],$$

где  $r$  радиальная координата, с началом в центре пузырька,  $t$  время,  $p_0$  статическое давление жидкости,  $R_0$  начальный радиус пузырька,  $R$  текущий радиус пузырька. Исходя из этого распределения, при  $r = 4^{\frac{1}{3}}R$  давление достигает максимума, который возрастает по мере схлопывания пузырька как  $(R_0/R)^3$ . В начале сферического коллапса реального кавитационного пузырька влияние пара в нем несущественно. Поэтому при коллапсе пузырька вблизи поверхности тела она испытывает значительное силовое воздействие.

Корнфельд и Суворов в работе [5] экспериментально определили, что коллапс кавитационного пузырька вблизи поверхности тела происходит с большими деформациями поверхности пузыря. Они предположили, что во время коллапса пузыря образуется высокоскоростная струйка, которая при ударе по поверхности тела вызывает её разрушение. Это предположение было доказано теоретически [6] и экспериментально [1]. На рис. 2 представлен процесс образования высокоскоростной струи [7]. В работе [8] проведен численный анализ процесса коллапса кавитационного пузырька вблизи поверхности тела в зависимости от начальной эллипсоидальной несферичности пузырька и расстояния от поверхности тела. Численное моделирование показало, что высокоскоростная струйка, направленная к стенке, образуется при коллапсе кавитационного пузырька, прикрепленного к стенке, с отношением полуосей  $e \in [0.82, 1.05]$ . Также установлено, что при уменьшении отношения полуосей пузырька диа-



Рис. 2: Коллапс кавитационного пузырька вблизи стенки с образованием высокоскоростной струи [7]

метр струи уменьшается, а скорость её конца увеличивается.

Скорость струи также зависит от расстояния кавитационного пузырька до поверхности тела [9, 10]. Наибольшая скорость струи, а значит и разрушающее воздействие, достигается при коллапсе кавитационного пузырька, прикрепленного к стенке. Прослойка жидкости между пузырьком и поверхностью тела играет роль демпфирующего слоя, ослабляя воздействие струи.

Исходя из этих результатов, наибольший вклад в разрушение поверхности тела вносит коллапс кавитационных пузырьков, прикрепленных к поверхности тела.

## **2 Кавитационное разрушение**

Для изучения кавитационного разрушения необходимо знать параметры импульса давления, создаваемого при коллапсе отдельного кавитационного пузырька, прикрепленного к поверхности тела. Такими параметрами являются: длительность воздействия, его амплитуда, и пространственное распределение.

### **2.1 Время кавитационного воздействия**

В эксперименте по акустической кавитации [11] получены осциллограммы импульсов давления, созданных схлопыванием отдельного пузырька. Частота источника колебаний 20 кГц. Их схематическое представление изображено на рис. 3. Также параметры силового воздействия получены в эксперименте [12]. Образование кавитационного пузырька достигну-

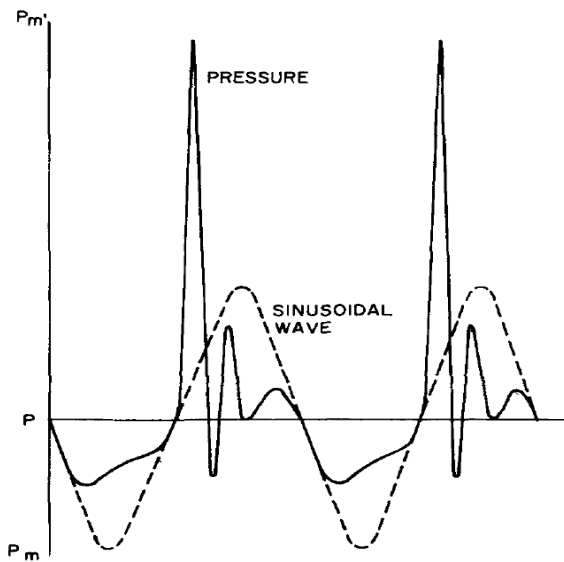


Рис. 3: Давление, созданное при коллапсе отдельного пузырька [11]

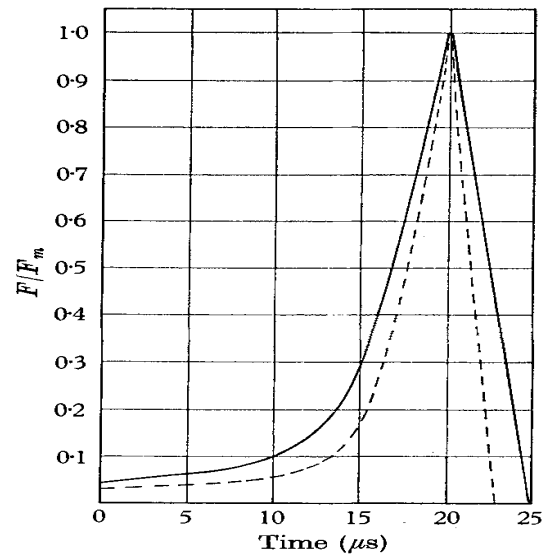


Рис. 4: Зависимость силы кавитационного воздействия от времени [12]

то путем локального нагрева жидкости электрическим разрядом. Зависимость силы кавитационного воздействия от времени представлена на рис. 4. Основываясь на этих данных, время кавитационного воздействия можно оценить 10 микросекундами.

## 2.2 Амплитуда гидродинамического давления

Для определения гидродинамического давления от коллапса кавитационного пузырька в работах [13, 14] предложен метод, основанный на аналогии между ударом струи жидкости и внедрением сферического наноиндентора в поверхность тела.

Напряжение на границе зоны контакта  $\sigma_p$  при вдавливании индентора определяется следующим образом [15]

$$\sigma_p = \frac{L_p}{\psi A_c}, \quad (2)$$

где  $L_p$  сила индентирования,  $A_c$  площадь зоны контакта,  $\psi$  параметр, равный 1.1 при упругом деформировании и 2.87 при пластическом деформировании. Для описания упруго-пластического поведения используется



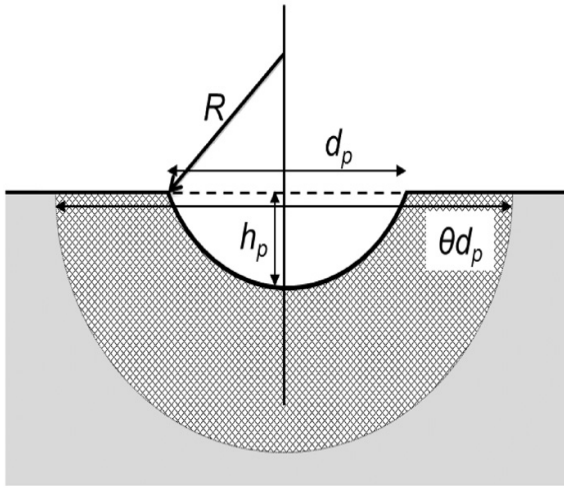


Рис. 5: Геометрия лунки, образованной при кавитационном воздействии. [13]

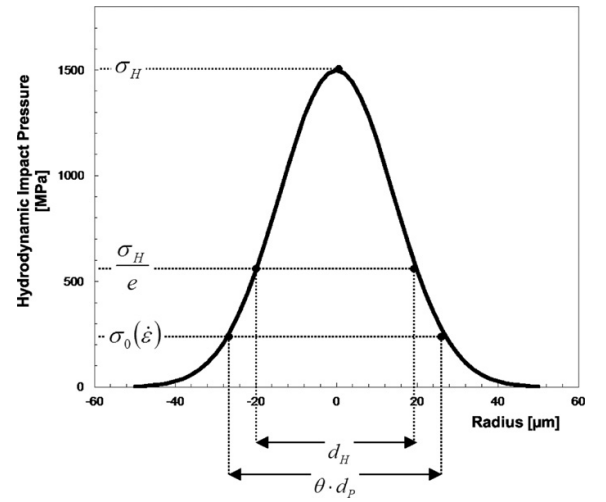


Рис. 6: Модель распределения гидродинамического давления [13]

степенной закон Холломона [16]

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon E, & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma_y \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n, & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ ,  $\sigma_0$  - предел текучести,  $E$  - модуль упругости,  $n$  - коэффициент упрочнения. Так как скорость деформации при кавитационном воздействии много больше, чем при индентировании, предел текучести уточняется при помощи модели Джонсона-Кука [17]

$$\sigma_0(\dot{\varepsilon}) = \sigma_0(1 + K \ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)), \quad (4)$$

где  $K$  - константа материала. Деформация на границе зоны контакта определяется следующим образом [18]

$$\varepsilon_p = 0.2 \frac{d_p h_p}{(d_p/2)^2 + h_p^2}, \quad (5)$$

где  $h_p$  - глубина лунки,  $d_p$  - диаметр лунки, как показано на рис 5. Зная  $h_p$  и  $d_p$ , из (5) определяется деформация  $\varepsilon_p$ , затем из (3) и (4) определяется напряжение  $\sigma_p$ . Далее из (2) определяется контактная сила  $L_p$ .

Для определения силы кавитационного воздействия нужно знать распределение гидродинамического давления на поверхность тела. В качестве такого распределения используется распределение Гаусса

$$\frac{\sigma_H}{\sigma} = e^{(d/d_H)^2}, \quad (6)$$

где  $\sigma_H$  - пик гидродинамического давления,  $d_H$  - диаметр струи,  $\sigma$  - напряжение на расстоянии  $d/2$  от центра лунки. Тогда интегрируя (6) получим силу кавитационного воздействия

$$L_H = \int_{r=0}^{\infty} 2\pi\sigma_H r e^{-(2r/d_H)^2} dr = \sigma_H \pi \frac{d_H^2}{4} \quad (7)$$

Теперь предполагая равенство силы кавитационного воздействия и контактной силы при индентировании, а также значения гидродинамического давления на границе области пластической деформации и предела текучести  $\sigma_0(\dot{\varepsilon})$ , получим систему уравнений относительно  $\sigma_H$  и  $d_H$

$$\begin{cases} L_p = \sigma_H \pi \frac{d_H^2}{4} \\ \frac{\sigma_H}{\sigma_0(\dot{\varepsilon})} = e^{(\theta d_p/d_H)^2} \end{cases}, \quad (8)$$

где  $\theta d_p/2$  - расстояние до границы области пластической деформации (рис. 5), а  $\theta$  - параметр, введенный в [15].

На рис. 7 представлены результаты процедуры определения пика гидродинамического давления в зависимости от диаметра струи жидкости, ударяющей по поверхности тела для алюминиевого сплава 7075-T651. Максимальное значение пика гидродинамического давления составляет 1590 Мпа при диаметре струи жидкости 7.31 мкм.

### **3 Разрушение поверхности тела при ударе абсолютно твердой микрочастицы**

Для оценки пороговых размеров кавитационного пузырька, коллапс которого инициирует разрушение поверхности, проведем аналогию с нормальным ударом абсолютно твердой сферической и цилиндрической микрочастицы о упругое полупространство. Удар будем считать квазистатическим, для того чтобы использовать результаты по внедрению жесткого

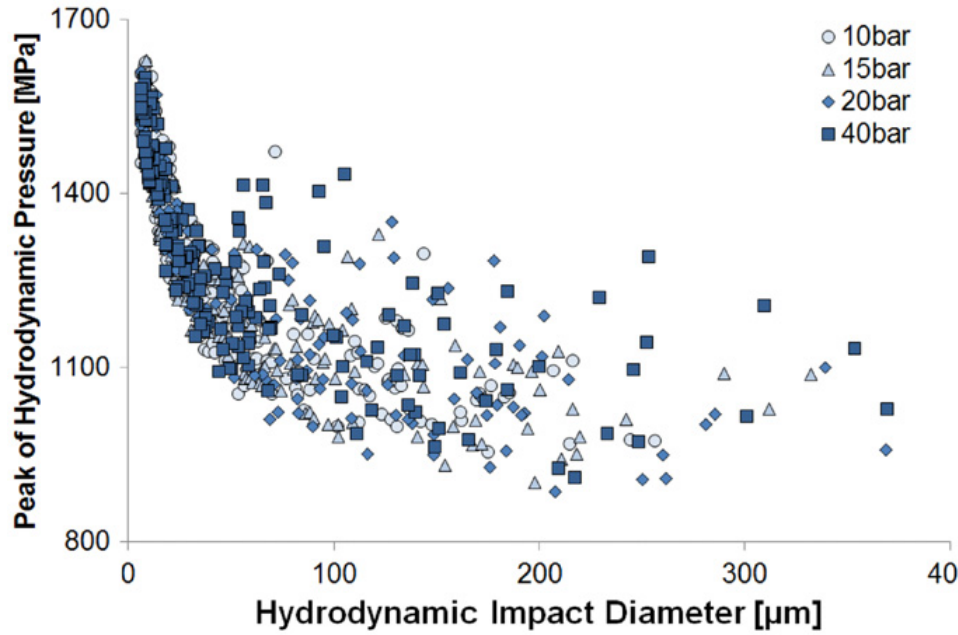


Рис. 7: Результат процедуры определения гидродинамического давления в зависимости от диаметра струи.

штампа в упругое полупространство [19]. При этом длительность импульсов напряжения при таком ударе очень мала. Классические статические критерии разрушения, например критерий критического напряжения, не могут быть использованы для анализа эрозионного разрушения.

Для этих целей используется структурно-временной критерий, который для данной задачи имеет следующий вид

$$\max_t \int_{t-\tau}^t \sigma(s) ds \leq \sigma_c \tau, \quad (9)$$

где  $\sigma(t)$  - текущее разрывающее напряжение,  $\sigma_c$  - статическая прочность материала,  $\tau$  - инкубационное время хрупкого разрушения, являющееся константой материала [20]. Здесь инкубационное время имеет смысл времени до разрушения бездефектной среды, нагруженной импульсом вида

$$\sigma(t) = \sigma_c H(t),$$

где  $H(t)$  - функция Хевисайда. Действительно, подставим это выражение в (9)

$$t_* H(t_*) - (t_* - \tau) H(t_* - \tau) = \tau,$$

где  $t_*$  - время разрушения, то есть время до момента, когда неравенство (9) обращается в равенство. Очевидно, что  $t_* = \tau$  [21].

### 3.1 Удар сферической микрочастицы

Будем считать удар сферической микрочастицы нормальным и квазистатическим. Тогда распределение давления по области контакта, полученное Герцем, имеет вид

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}, \quad (10)$$

где  $a$  - радиус области контакта. Это распределение приводит к вертикальному смещению

$$u_z(r) = \frac{\pi p_0 (1 - \nu^2)}{4aE} (2a^2 - r^2), \quad (11)$$

где  $E$  - модуль Юнга упругого полупространства, а  $\nu$  - его коэффициент Пуассона. Также перемещение точки поверхности в области контакта от изначально плоской поверхности до актуального положения на поверхности шара радиуса  $R$  равно

$$u_z(r) = h - \frac{r^2}{2R},$$

где  $h$  - вертикальное смещение в центре области контакта.

Подберем параметры  $a$  и  $p_0$  так, чтобы распределение давления (10) приводило к таким перемещениям.

$$\frac{\pi p_0 (1 - \nu^2)}{4aE} (2a^2 - r^2) = h - \frac{r^2}{2R}.$$

Отсюда находим  $a$  и  $p_0$

$$a^2 = Rh, \quad p_0 = \frac{2E}{\pi(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \quad (12)$$

Интегрируя (10) по области контакта найдем полную нагрузку

$$P = \frac{2}{3} \pi p_0 a^2$$

Подставляя выражения для  $a$  и  $p_0$ , получим

$$P = k_b h^{3/2}, \quad (13)$$

где  $k_b = 4E\sqrt{R}/3(1 - \nu^2)$  [19, 22].

Для определения временной зависимости  $P(t) = k_b h(t)^{3/2}$ , рассмотрим уравнение движения

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = -P(t) = -k_b h(t)^{3/2}, \quad (14)$$

где  $m$  - масса микрочастицы. Понизим порядок уравнения при помощи замены

$$s = \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{ds}{dh} \cdot s$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$\frac{ds}{dh} \cdot s = -\frac{k_b}{m} \cdot h^{3/2}$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное выражение, получим

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = C - \frac{k_b}{m} \cdot \frac{2}{5} h^{5/2}$$

В момент времени  $t = 0$  вертикальное перемещение  $h = 0$ , а  $dh/dt = V$  - скорость удара микрочастицы. Тогда скорость внедрения микрочастицы в полупространство равна

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sqrt{V^2 - \frac{4k_b}{5m} h(t)^{5/2}} \quad (15)$$

Отсюда находим максимальную глубину внедрения

$$h_0 = \left(\frac{5}{4k_b} m V^2\right)^{2/5} \quad (16)$$

С помощью найденной скорости внедрения находим время удара [23]

$$t_0 = 2.94 \frac{h_0}{V} \approx 3.2 \left(\frac{m^2}{V k_b^2}\right)^{1/5} \quad (17)$$

Тогда решение уравнения (14) с большой точностью можно аппроксимировать так [23]:

$$h(t) = h_0 \sin \frac{\pi t}{t_0}$$

Растягивающими напряжениями вне области контакта, возникающими при внедрении сферического индентора, являются напряжения в радиальном направлении (в цилиндрических координатах), и выражаются следующим образом [19, 24]

$$\sigma_r = \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{P}{\pi r^2}. \quad (18)$$

Максимального значения  $\sigma_r$  достигает на границе области контакта при  $r = a$  и является максимальным растягивающим напряжением в полупространстве.

Радиус области контакта изменяется по мере внедрения индентора и равен

$$a(t) = \sqrt{Rh(t)},$$

где  $h(t)$  - вертикальное перемещение в центре зоны контакта. Тогда, принимая во внимание (11) и (12)

$$h(t) = \frac{a(t)^2}{R} = \frac{3P(t)(1 - \nu^2)}{4a(t)E}$$

Отсюда следует, что

$$a(t) = \left( \frac{3(1 - \nu^2)}{4E} RP(t) \right)^{1/3} \quad (19)$$

В итоге, выражение для растягивающих напряжений (18) перепишется следующим образом

$$\sigma_r(t) = \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{P(t)}{\pi a(t)^2} = \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_b}{R} \sqrt{h_0} \sqrt{\sin \frac{\pi t}{t_0}}$$

Подставляя это выражение в критерий разрушения (9), получим

$$\frac{1 - 2\nu}{2\pi} \frac{k_b}{R} \sqrt{h_0} \max_t \int_{t-\tau}^t \sqrt{\sin \frac{\pi s}{t_0}} ds = \tau \sigma_c \quad (20)$$

Дифференцируя по времени интеграл в (20) и приравнявая производную нулю, получим выражение для определения момента времени  $t$ , доставляющего максимум интегралу.

$$\sin \frac{\pi t}{t_0} = \sin \frac{\pi(t - \tau)}{t_0}$$

Решая это уравнение, получим, что максимум интеграла достигается при  $t = (t_0 + \tau)/2$ . Также введем безразмерный параметр времени  $\lambda = t_0/\tau$ . Тогда выражение для критерия разрушения примет вид

$$\frac{1 - 2\nu}{2\pi} \frac{k_b}{R} \sqrt{h_0} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sqrt{\sin \frac{\pi s}{\lambda}} [H(s) - H(s - \lambda)] ds = \sigma_c \quad (21)$$

Предположим, что диаметр струи жидкости до удара и последующего растекания по поверхности равен максимальному диаметру области контакта сферической микрочастицы при ударе о упругое полупространство (19). Длительность кавитационного воздействия равна длительности удара микрочастицы (17), и сила кавитационного воздействия (7) равна силе, действующей на область контакта при ударе микрочастицы.

$$\begin{cases} d_H = \max_t 2a(t) = 2a(t_0/2) = 2a = 2\sqrt{Rh_0} \\ t_0 = 2.94 \frac{h_0}{V} \\ L_H = \sigma_H \frac{\pi d_H^2}{4} = k_b h_0^{3/2} = P \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнения системы следует, что пик гидродинамического давления равен среднему давлению на область контакта микрочастицы с полупространством

$$\sigma_H = \frac{P}{\pi a^2}. \quad (22)$$

Выражая  $h_0$  из второго уравнения системы и подставляя в первое, получим

$$h_0 = \frac{t_0 V}{2.94} \quad (23)$$

$$d_H = 2\sqrt{\frac{t_0}{2.94} R V} \quad (24)$$

Далее, подставляя выражения для радиуса области контакта (19) и контактной силы (13) в (22), получим

$$\frac{P}{\pi a^2} = \frac{k_b}{\pi R} \sqrt{h_0} = \frac{4E}{3\pi(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{t_0}{2.94}} \sqrt{\frac{V}{R}} \quad (25)$$

Подберем скорость удара микрочастицы так, чтобы среднее давление на область контакта соответствовало максимальному значению пика гидродинамического давления, полученного из эксперимента (2.2), то есть  $\sigma_H^{exp} = 1590$  Мпа при  $d_H^{exp} = 7.31$  мкм. Тогда

$$\begin{cases} \frac{P}{\pi a^2} = \frac{4E}{3\pi(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{t_0}{2.94}} \sqrt{\frac{V}{R}} = \sigma_H^{exp} \\ d_H^{exp} = 2\sqrt{\frac{t_0}{2.94}} R V \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем  $V$

$$V = \frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2} \frac{2.94}{t_0} \frac{3\pi(1-\nu^2)}{4E} \quad (26)$$

Подставим это выражение в (25)

$$\frac{P}{\pi a^2} = \sqrt{\frac{4E}{3\pi(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2R}} \quad (27)$$

Теперь используем критерий разрушения (21) для определения порогового радиуса микрочастицы, а следовательно и порогового диаметра струи жидкости.

$$\sqrt{\frac{4E}{3\pi(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2R}} = \frac{2\sigma_c}{(1-2\nu)^{\frac{(\lambda+1)/2}{(\lambda-1)/2}} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sqrt{\sin \frac{\pi s}{\lambda}} [H(s) - H(s-\lambda)] ds}$$

Выразим из этого соотношения пороговый радиус микрочастицы

$$R^* = \frac{4E}{3\pi(1-\nu^2)} \frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2} \left( \frac{(1-2\nu)^{\frac{(\lambda+1)/2}{(\lambda-1)/2}} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sqrt{\sin \frac{\pi s}{\lambda}} [H(s) - H(s-\lambda)] ds}{2\sigma_c} \right)^2 \quad (28)$$

Подставляя (26) и (28) в (24), получим выражение для порогового диаметра струи жидкости

$$d_H^* = \frac{(1-2\nu)\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2\sigma_c} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sqrt{\sin \frac{\pi s}{\lambda}} [H(s) - H(s-\lambda)] ds.$$



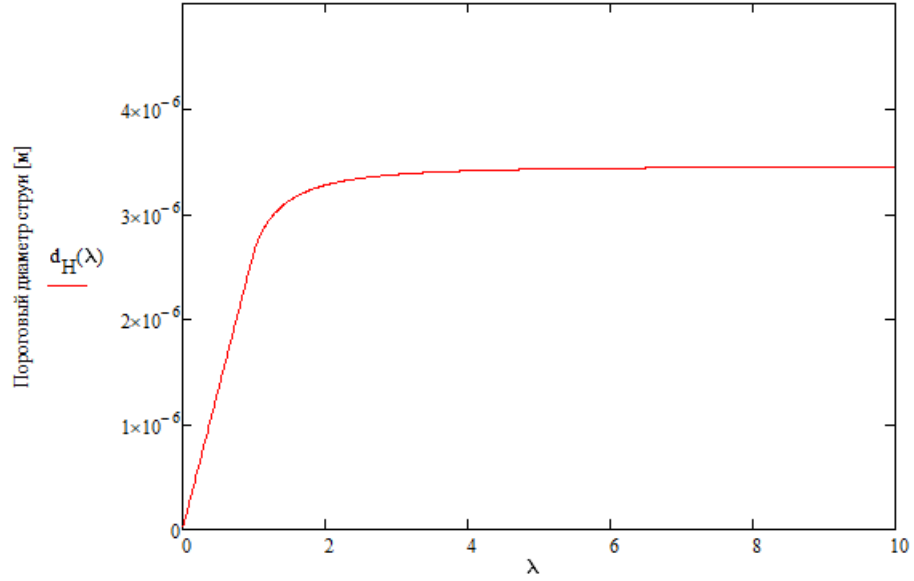


Рис. 8: Зависимость порогового диаметра струи от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$

На рис. 8 представлен результат расчета порогового диаметра струи жидкости для алюминиевого сплава 7075-T651 ( $E = 71.7$  ГПа,  $\nu = 0.33$ ,  $\sigma_c = 572$  МПа,  $\tau = 0.71$  мкс) в зависимости от безразмерного параметра времени  $\lambda$ . Из графика видно, что при  $\lambda \geq 2$  пороговый диаметр струи жидкости  $d_H^* \approx 3.4$  мкм.

Из соотношений (21) и (22) следует, что пороговое значение пика гидродинамического давления равно

$$\sigma_H^* = \frac{P^*}{\pi a^2} = \frac{2\sigma_c}{(1-2\nu) \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sqrt{\sin \frac{\pi s}{\lambda}} [H(s) - H(s-\lambda)] ds}$$

На рис. 9 представлена зависимость  $\sigma_H^*$  от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$ . Исходя из этой зависимости можно сказать, что при  $\lambda \geq 4$  пороговый пик гидродинамического давления  $\sigma_H^* \approx 3.4$  ГПа.

### 3.2 Удар цилиндрической микрочастицы

Аналогично удару сферической микрочастицы, будем считать удар нормальным и квазистатическим. При ударе цилиндрической микрочастицы

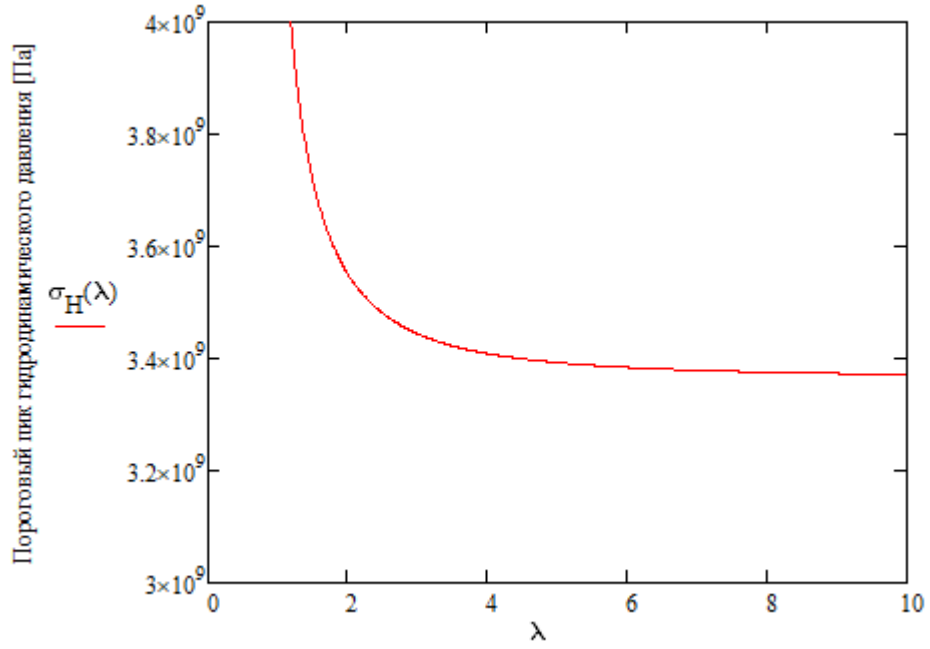


Рис. 9: Зависимость порогового пика гидродинамического давления от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$

радиус области контакта  $a$  равен радиусу частицы  $R$  и не изменяется со временем. Вертикальные смещения одинаковы во всей области контакта и равны [19]

$$h = \frac{\pi(1 - \nu^2)p_0 R}{E}. \quad (29)$$

К такому смещению приводит следующее распределение давления

$$p(r) = p_0(1 - r^2/R^2)^{-1/2}$$

Интегрируя соотношение выше по области контакта, получим выражение для полной нагрузки

$$P = \int_0^R 2\pi r p_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1/2} dr = 2\pi R^2 p_0$$

Выразим  $p_0$  из соотношения выше и подставим в (29)

$$h = \frac{(1 - \nu^2)P}{2ER} \Rightarrow P = k_c h, \quad (30)$$

где  $k_c = \frac{2RE}{1-\nu^2}$ .

Для определения временной зависимости  $P(t) = k_ch(t)$ , рассмотрим уравнение движения

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = -P(t) = -k_ch(t). \quad (31)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Граничные условия: скорость внедрения в полупространство в начальный момент времени равна скорости удара, а глубина внедрения равна нулю

$$h(0) = 0, \quad \frac{dh}{dt}(0) = V.$$

Решение имеет следующий вид

$$h(t) = \sqrt{\frac{mV^2}{k_c}} \sin \sqrt{\frac{k_c}{m}} t.$$

Тогда максимальная глубина внедрения

$$h_0 = \sqrt{\frac{mV^2}{k_c}}. \quad (32)$$

Время удара

$$t_0 = \pi \sqrt{\frac{m}{k_c}}. \quad (33)$$

Максимальные растягивающие напряжения в полупространстве являются радиальными (в цилиндрических координатах) на границе области контакта при подходе с внешней стороны [19, 24]

$$\sigma_r(t) = \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{P(t)}{\pi R^2}, r \rightarrow R + 0.$$

Подставляя (30), (32) и (33) в выражение для полной нагрузки, получим

$$P = \frac{2E}{1 - \nu^2} \frac{t_0}{\pi} V R$$

Предположим, что диаметр струи жидкости до удара и последующего растекания по поверхности равен диаметру цилиндрической микрочастицы, длительность и сила кавитационного воздействия равна длительности и силе удара микрочастицы

$$\begin{cases} d_H = 2R \\ t_0 = \pi \sqrt{\frac{m}{k_c}} \\ L_H = \sigma_H \frac{\pi d_H^2}{4} = P = \frac{2E}{1 - \nu^2} \frac{t_0}{\pi} V R \end{cases}.$$

Из первого и последнего уравнений системы видно, что пик гидродинамического давления равен среднему давлению на область контакта

$$\sigma_H = \frac{P}{\pi R^2} = \frac{2E}{1-\nu^2} \frac{t_0}{\pi^2} \frac{V}{R} \quad (34)$$

Далее, подберем скорость удара таким образом, чтобы значение пика гидродинамического давления (34) при  $d_H = 2R$ , совпадало с экспериментальными данными  $\sigma_H^{exp} = 1590$  Мпа,  $d_H^{exp} = 7.31$  мкм (рис. 7).

$$\begin{cases} \frac{P}{\pi R^2} = \frac{2E}{1-\nu^2} \frac{t_0}{\pi^2} \frac{V}{R} = \sigma_H^{exp} \\ d_H^{exp} = 2R \end{cases}$$

Отсюда находим скорость удара

$$V = \sigma_H^{exp} d_H^{exp} \frac{1-\nu^2}{4E} \frac{\pi^2}{t_0}. \quad (35)$$

Теперь подставим (35) и (34) в критерий разрушения (9)

$$\frac{1-2\nu}{2} \frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2R^*} \max_t \int_{t-\tau}^t \sin \frac{\pi s}{t_0} ds = \tau \sigma_c.$$

Интеграл в выражении выше достигает максимального значения при  $t = (t_0 + \tau)/2$ . Введем безразмерный параметр времени  $\lambda = t_0/\tau$ , тогда критерий разрушения примет вид

$$\frac{1-2\nu}{2} \frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp}}{2R^*} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sin \frac{\pi s}{\lambda} [H(s) - H(s-\lambda)] ds = \sigma_c, \quad (36)$$

где  $R^*$  - пороговый радиус микрочастицы. Принимая во внимание, что  $d_H = 2R$ , выпишем выражение для порогового диаметра струи жидкости, чей удар по поверхности тела инициирует его разрушение:

$$d_H^* = \frac{\sigma_H^{exp} d_H^{exp} (1-2\nu)}{2\sigma_c} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sin \frac{\pi s}{\lambda} [H(s) - H(s-\lambda)] ds.$$

Пороговое значение пика гидродинамического давления определяется следующим образом:

$$\sigma_H = \frac{P}{\pi R^2} = \frac{2\sigma_c}{(1-2\nu) \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \sin \frac{\pi s}{\lambda} [H(s) - H(s-\lambda)] ds}.$$

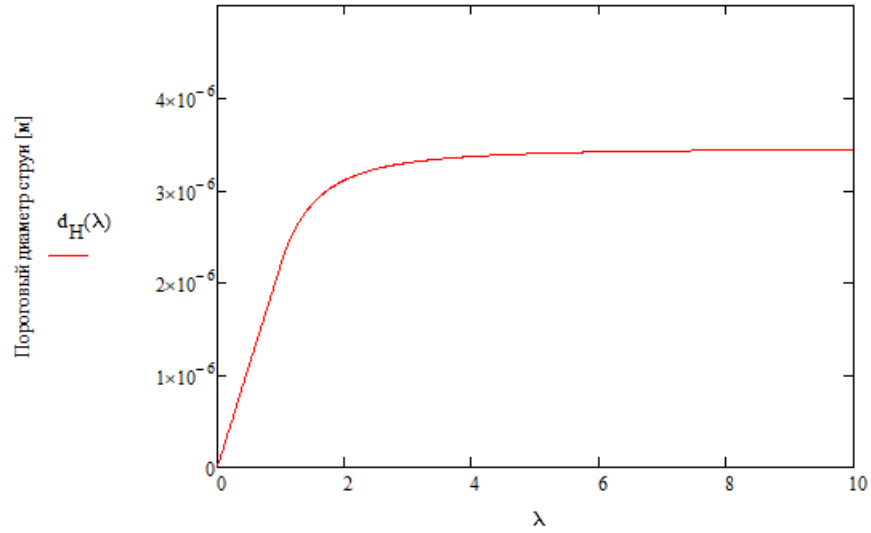


Рис. 10: Зависимость порогового диаметра струи от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$

На рис. 10 представлен результат расчета порогового диаметра струи жидкости для алюминиевого сплава 7075-T651 ( $E = 71.7$  ГПа,  $\nu = 0.33$ ,  $\sigma_c = 572$  МПа,  $\tau = 0.71$  мкс) в зависимости от безразмерного параметра времени  $\lambda$ . Из графика видно, что при  $\lambda \geq 2$  пороговый диаметр струи жидкости  $d_H^* \approx 3.3$  мкм.

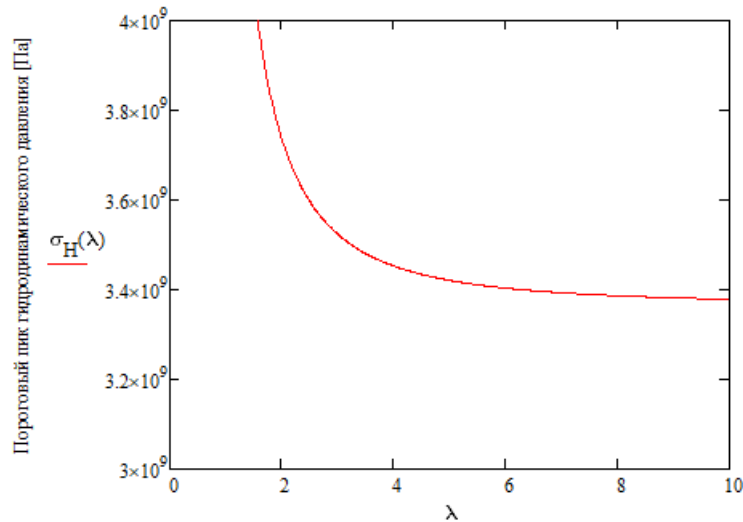


Рис. 11: Зависимость порогового пика гидродинамического давления от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$

На рис. 11 представлена зависимость  $\sigma_H^*$  от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$ . Исходя из этой зависимости можно сказать, что при  $\lambda \geq 4$  пороговый пик гидродинамического давления  $\sigma_H^* \approx 3.4$  ГПа.

### 3.3 Сравнение результатов при ударе сферической и цилиндрической микрочастиц

На рис. 12 изображены зависимости пороговых характеристик коллапса кавитационного пузырька (пик гидродинамического давления и диаметр струи) от безразмерного параметра времени  $\lambda = t_0/\tau$  для удара сферической и цилиндрической микрочастиц. Исходя из этих зависимостей, можно сделать вывод, что аналогия между ударом струи жидкости и сферической или цилиндрической микрочастицы дает одинаковые оценки для пороговых характеристик коллапса кавитационного пузырька.

Таким образом, критический диаметр струи  $d_H^* \approx 3.4$  мкм, критический пик гидродинамического давления  $\sigma_H^* \approx 3.4$  ГПа для значений параметра  $\lambda \geq 4$ . Следовательно эти оценки верны для длительностей кавитационного воздействия  $t_0 \geq 2.8$  мкс.

Для определения порогового размера кавитационного пузырька, коллапс которого инициирует разрушение поверхности, используем результат численного моделирования схлопывания пузырька вблизи поверхности [25]. На рис. 13 показано, что радиус струи равен примерно 1/10 радиуса пузырька. Следовательно,  $D_b^* \approx 34$  мкм.

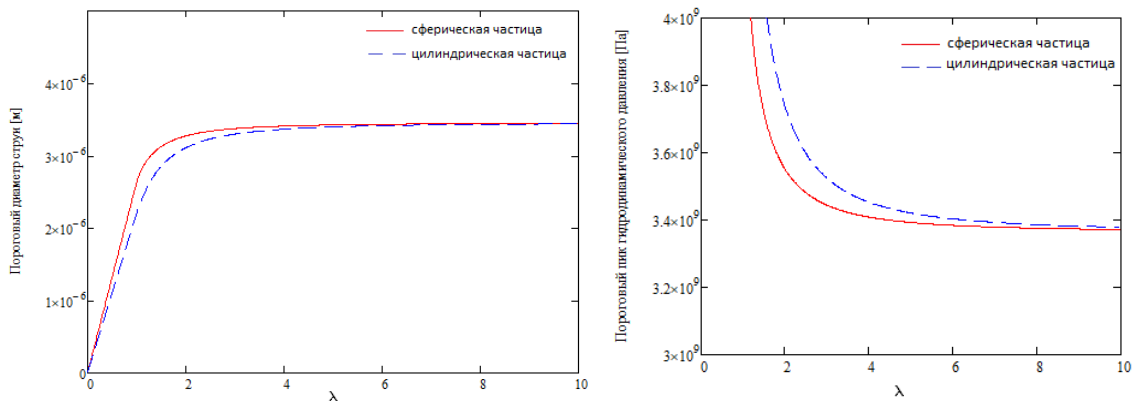


Рис. 12: Сравнение пороговых характеристик коллапса кавитационного пузырька

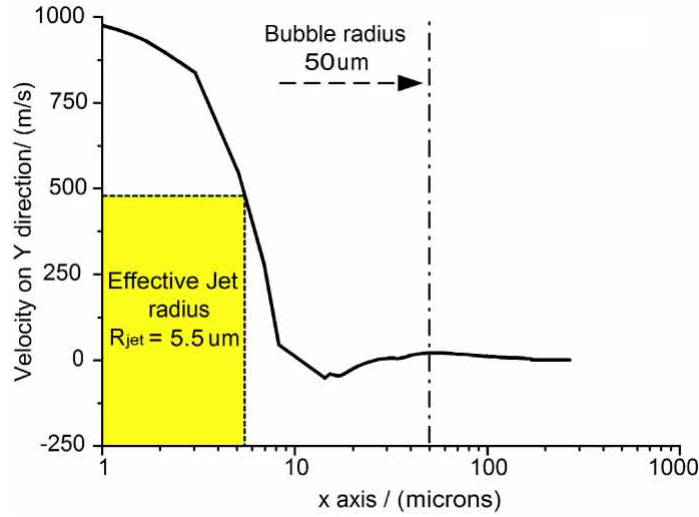


Рис. 13: Распределение скорости в струе жидкости

### 3.4 Оценка параметров потока жидкости

Для грубой оценки параметров потока жидкости, в котором возможен коллапс кавитационного пузырька, диаметр которого равен  $D_b^* \approx 34$  мкм, воспользуемся теорией сферического схлопывания Рэлея [4].

Время сферического коллапса пузырька определяется следующим образом

$$T_c = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^{R_{max}} \frac{(R/R_{max})^{3/2}}{(1 - R^3/R_{max}^3)^{1/2}} dR = 0.915 R_{max} \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}, \quad (37)$$

где  $R_{max}$  - максимальный радиус кавитационного пузырька,  $\rho$  - плотность жидкости,  $p_0$  - давление в жидкости вдали от пузырька. С другой стороны, время коллапса можно интерпретировать, как время, за которое струя жидкости преодолевает расстояние, равное диаметру пузырька:

$$T_c = \frac{2R_{max}}{u_{jet}}, \quad (38)$$

где  $u_{jet}$  - средняя скорость по струе.

Скорость струи можно найти, используя уравнение гидроудара [6]

$$\sigma = \frac{\rho_{LC} \rho_{SCS}}{\rho_{SCS} + \rho_{LC}} u_{jet} \approx \rho_{LC} u_{jet} \Rightarrow u_{jet} = \frac{\sigma}{\rho_{LC}}, \quad (39)$$

где  $\rho_L$  - плотность жидкости,  $c_L$  - скорость звука в жидкости,  $\sigma$  - среднее

давление.

$$\sigma = \frac{1}{\pi d_H^2/4} \int_0^{d_H/2} 2\pi r \sigma_H^* e^{-(2r/d_H)^2} dr = \sigma_H^* \frac{e-1}{e}$$

Подставляя (39) и (38) в (37) получим

$$\frac{2\rho_L c_L}{\sigma_H^* (e-1)/e} = 0.915 \sqrt{\frac{\rho_L}{p_0}}.$$

Отсюда находим, что

$$p_0 = 429 \text{ МПа}, \quad u_{jet} = 1433 \text{ м/с}.$$

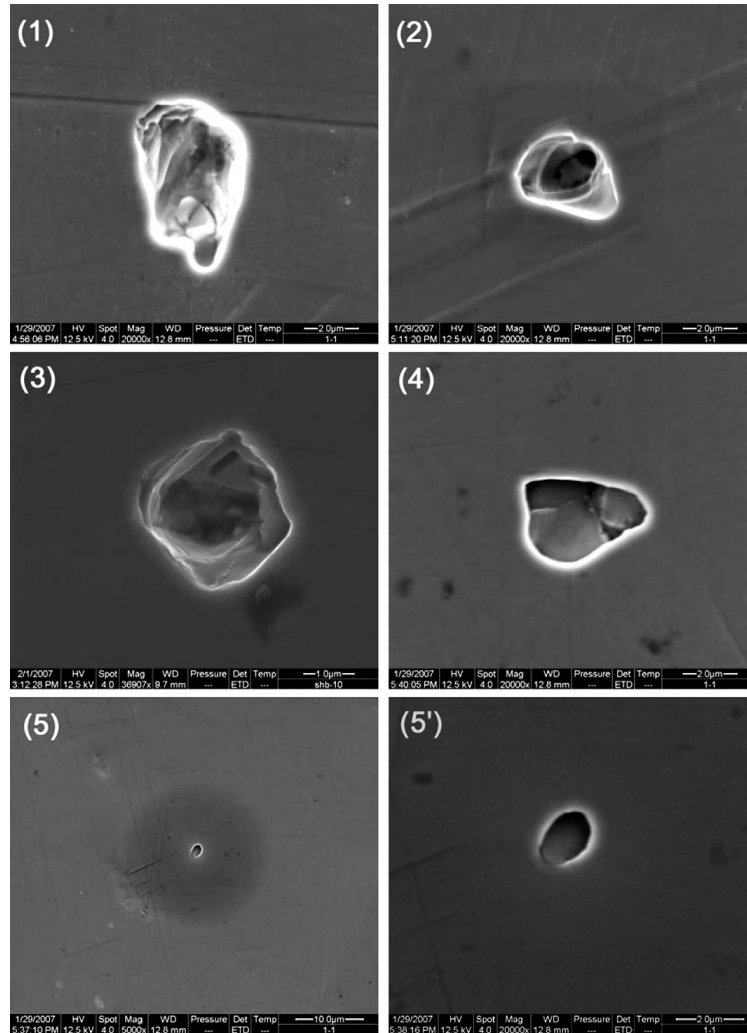


Рис. 14: Кавитационная эрозия поверхности образца из стали 40Cr



## 4 Заключение

Результатом данной работы являются пороговые характеристики коллапса кавитационного пузырька. Такими характеристиками являются пик гидродинамического давления и диаметр струи жидкости до удара и последующего растекания по поверхности. При коллапсе такого кавитационного пузырька можно ожидать появление радиальных трещин на границе лунки.

В эксперименте по акустической кавитации [26] при помощи электронного микроскопа получены изображения поверхности образца из стали 40Cr. На рис. 14 изображены кавитационные лунки, имеющие ярко выраженную ступенчатую границу, образованную при разрушении поверхности. Диаметр этих лунок равен 1-2 мкм. Пороговый диаметр струи для этого материала ( $E = 214$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_c = 980$  МПа,  $\tau = 0.31$  мкс), рассчитанный методом, описанном в данной работе, равен 2 мкм, что хорошо согласуется с экспериментом, описанном выше. Однако расчетный пороговый пик гидродинамического давления равен 5.8 ГПа, что не нашло экспериментальных подтверждений, но соответствует общей тенденции зависимости пика гидродинамического давления от диаметра струи, изображенной на рис. 7.

Также получены оценки на длительности кавитационного воздействия ( $t_0 \geq 2.8$  мкс), при которых справедливы полученные оценки для  $\sigma_H^*$  и  $d_H^*$ . Что согласуется с экспериментами [11, 12], где длительность кавитационного воздействия равно примерно 10 мкс.

Оценка гидростатического давления жидкости является приближенной, так как теория Рэлея подразумевает сферический коллапс кавитационного пузырька вдали от границ тела, но в данной работе рассматривается схлопывание пузырька, прикрепленного к стенке. В работе [8] показано, что изменение формы пузырька сильно зависит от начальной несферичности и расстояния до поверхности тела.

## Список литературы

- [1] Lauterborn W., Bolle H. Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. 1975. Vol. 72, no. 2. P. 391–399.
- [2] Petkovsek R., Gregorcic P. A laser probe measurement of cavitation bubble dynamics improved by shock wave detection and compared to shadow photography // *Journal of Applied Physics*. 2007. Vol. 102, no. 4. P. 044909.
- [3] Пирсол И. . . Кавитация. Мир, 1975.
- [4] Rayleigh L. VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine Series 6*. 1917. Vol. 34, no. 200. P. 94–98.
- [5] Kornfeld M., Suvorov L. On the Destructive Action of Cavitation // *Journal of Applied Physics*. 1944. Vol. 15, no. 6. P. 495–506.
- [6] Plesset M. S., Chapman R. B. Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. 1971. Vol. 47, no. 2. P. 283–290.
- [7] Blake J. R., Keen G. S., Tong R. P., Wilson M. Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1999. Vol. 357, no. 1751. P. 251–267.
- [8] Аганин ., Ильгамов ., Косолапова ., Малахов . Схлопывание кавитационного пузырька в жидкости вблизи твердой стенки // *Вестник Башкирского университета*. 2013. Vol. 18. P. 15–21.
- [9] PHILIPP A., LAUTERBORN W. Cavitation erosion by single laser-produced bubbles // *Journal of Fluid Mechanics*. 1998. Vol. 361. P. 75–116.

- [10] Аганин ., Ильгамов ., Малахов . et al. Ударное воздействие кавитационного пузырька на упругое тело // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2011. Vol. 153. P. 131–146.
- [11] Vyas B., Preece C. M. Stress produced in a solid by cavitation // Journal of Applied Physics. 1976. Vol. 47, no. 12. P. 5133–5138.
- [12] Jones I. R., Edwards D. H. An experimental study of the forces generated by the collapse of transient cavities in water // Journal of Fluid Mechanics. 1960. Vol. 7, no. 4. P. 596–609.
- [13] Carnelli D., Karimi A., Franc J.-P. Evaluation of the hydrodynamic pressure of cavitation impacts from stress–strain analysis and geometry of individual pits // Wear. 2012. Vol. 289. P. 104 – 111.
- [14] Carnelli D., Karimi A., Franc J.-P. Application of spherical nanoindentation to determine the pressure of cavitation impacts from pitting tests // Journal of Materials Research. 2012. Vol. 27, no. 1. P. 91–99.
- [15] HA F. Phenomenological Analysis of Plastic Spherical Indentation // J. Eng. Mater. Technol. 1976. Vol. 98, no. 3. P. 272–281.
- [16] Hollomon J. H. Tensile deformation // AIME TRANS. 1945. Vol. 12, no. 4. P. 1–22.
- [17] Johnson G. R., Cook W. H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics / The Hague, The Netherlands. Vol. 21. 1983. P. 541–547.
- [18] Tabor D. The hardness of metals. Oxford university press, 2000.
- [19] Джонсон . Механика контактного взаимодействия. 1989.
- [20] Petrov Y. V., Morozov N., Smirnov V. Structural macromechanics approach in dynamics of fracture // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2003. Vol. 26, no. 4. P. 363–372.

- [21] Петров ., ЮВ Смирнов. О взаимосвязи пороговых характеристик эрозионного и откольного разрушения // Журнал технической физики. 2010. Vol. 80, no. 2. P. 71–76.
- [22] Попов . Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. Litres, 2016.
- [23] Колесников ., Ю.В. Морозов. Механика контактного разрушения // М.: ЛКИ.–2010.–224 с. 2011.
- [24] Volkov G., Gorbushin N., Petrov Y. V. On the dependence of the threshold energy of small erodent particles on their geometry in erosion fracture // Mechanics of Solids. 2012. Vol. 47, no. 5. P. 491–497.
- [25] Chen H., Wang J., Li Y., Chen D. Effect of hydrodynamic pressures near solid surfaces in the incubation stage of cavitation erosion // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. 2008. Vol. 222, no. 4. P. 523–531.
- [26] Haosheng C., Jiang L., Darong C., Jiadao W. Damages on steel surface at the incubation stage of the vibration cavitation erosion in water // Wear. 2008. Vol. 265, no. 5. P. 692–698.